## Тема 1.7. Законы и правила упрощения логических функций

**[1.7.1. Соотношения, законы и правила алгебры логики](#_1.7.1._Соотношения,_законы)**

**[1.7.2. Правила упрощения логических функций](#_1.7.2._Правила_упрощения)**

**[1.7.3. Контрольные вопросы по теме «Законы и правила упрощения логических функций»](#_1.7.3._Контрольные_вопросы)**

**[1.7.4. Тестовые задания по теме «Законы и правила упрощения логических функций»](#_1.7.4._Тестовые_задания)**

### 1.7.1. Соотношения, законы и правила алгебры логики

**Соотношения**

****

**Законы отрицания (инверсии)**

**а)** отрицание конъюнкции

****

 Отрицание от конъюнкции равно дизъюнкции отрицаний.

**б)** отрицание дизъюнкции

****

 Отрицание от дизъюнкции равно конъюнкции отрицаний.

**Переместительный закон**

Логические функции И и ИЛИ подчиняются переместительному закону:



****

**Сочетательный закон**

Логические функции И и ИЛИ подчиняются сочетательному закону:





**Дистрибутивный (распределительный) закон**

Непосредственной проверкой можно убедиться, что операции логического сложения и логического умножения подчиняются дистрибутивному (распределительному) закону: одинаковые переменные в конъюнкциях и дизъюнкциях можно выносить за скобку.

**а)** дистрибутивный закон умножения по отношению к сложению имеет такой же вид, как и для алгебраического сложения и умножения, например:

(распределение конъюнкции по дизъюнкции);

**b)** дистрибутивный закон сложения по отношению к умножению является специфичным для алгебры логики и не имеет аналогов в обычной алгебре:

(распределение дизъюнкции по конъюнкции).

Доказательство:

******

Согласно основным соотношениям алгебры логики выражение в скобках равно1.

Непосредственно из дистрибутивного закона вытекают следующие правила, которые используются при преобразовании функций, при их **минимизации**, т.е. приведении их к виду с **наименьшим числом конъюнкций минимально возможного ранга**. После этого функция не поддается дальнейшему упрощению.

Из **первой** формы дистрибутивного закона вытекают следующие правила.

**Правило склеивания для ДНФ**

**а)** (для 2-х переменных)

.

Доказательство:

***\_\_***



**b)** (для 3-х переменных)

****

Доказательство:



Это правило позволяет заменить два члена, имеющие общую часть (а) - Xиb) –) и аргумент (а) - Y и b) - X) с инверсией в одном члене и без инверсии в другом члене, одним общим членом (а) - Х и b) - ) - т.е. произвести склеивание.

**Правило поглощения для ДНФ**

**а)** (для 2-х переменных)

XVXY = X.

 Доказательство:

XVXY = X (1VY) = X,

**b)** (для 3-х переменных)

XVX Λ YVX Λ Y Λ Z = X.

Доказательство:

.

Это правило позволяет заменить 2 (или больше - 3) члена, один из которых входит в другой (конъюнкция) в качестве сомножителя, одним этим членом, т.е. произвести «поглощение» члена конъюнкции общим членом.

Из **второй** формы дистрибутивного закона вытекает правило свертки.

**Правило свертки для ДНФ**

**a)**

Доказательство:

Так как все законы в алгебре логики тождественны, то из второй формы дистрибутивного закона имеем

****так как

или

**b)** 

Доказательство:

\_ \_ \_ \_

**XVX Λ Y = (XVX) Λ (XVY)=XVY.**

Это правило позволяет упростить один из членов дизъюнктивной нормальной формы.

Аналогичные формулы существуют для преобразования конъюнктивных нормальных форм.

**Правило склеивания для КНФ**



Доказательство:



**Правило поглощения для КНФ**



 Доказательство:



**Правило свертки для КНФ**

****

Доказательство:

**.**

**Пример 1.7.1-1.** Пусть задана логическая функция:



Требуется упростить функцию (получить ее минимальную форму):

1. Преобразуем член с инверсией



1. Раскрываем скобки:

****

**(**конъюнкция **).**

1. Преобразуем член с конъюнкцией

** {**раскрываем скобки**} =**



1. Подставляем преобразованные выражения в исходную формулу:



Это нормальная дизъюнктивная форма. Применяя к ней правила склеивания и поглощения, можно ее упростить:

1. к 1-му и 2-му членам применим правило склеивания:



**2)** к 3-му и 5-му членам применим правило поглощения:



Получим



Результат:****не подлежит дальнейшему преобразованию (упрощению). Следовательно, минимальная форма исходной функции

****

### 1.7.2. Правила упрощения логических функций

 Дана некоторая логическая функция либо в аналитическом виде, либо в виде таблицы, в которой перечислены значения функции при всех возможных наборах аргументов.

Требуется определить вид простейшей формулы, выражающей заданную функцию, которая содержит минимальное количество элементарных логических функций И, ИЛИ, НЕ.

Эта простейшая формула может иметь

1. либо нормальную дизъюнктивную форму
2. либо нормальную конъюнктивную форму
3. либо какой-нибудь еще тип.

Нахождение такой простейшей формулы, выражающей заданную функцию, удобно выполнять в несколько этапов.

На **первом** этапе логическая функция представляется в **СДНФ** или в **СКНФ**.

Если количество наборов аргументов, при которых функция равна 1, меньше количества наборов, при которых она равна 0, то наиболее простой окажется **СДНФ**, в противном случае - **СКНФ**.

Если исходная функция задана аналитически, то преобразование ее в **СДНФ** или **СКНФ** выполняется в такой последовательности:

**1)** Путем последовательного применения законов инверсии, логическая функция приводится к нормальной форме, в которой инверсия применяется только к аргументам, но не к функциям от них.

**2)** Путем раскрытия скобок (по известным формулам) логическая функция приводится к дизъюнктивной нормальной или конъюнктивной нормальной форме (где **ДНФ** - дизъюнкция ряда членов, которые есть конъюнкция аргументов, взятых с инверсией или без нее; а **КНФ** - конъюнкция ряда членов, которые есть дизъюнкция аргументов, взятых с инверсией или без нее.)

**3)** Если это **ДНФ**, и каждый член представляет собой конъюнкцию менее n членов, (n - количество аргументов функции), то каждый такой член умножается на выражение , тождественно равное 1 (Х- один из аргументов, которые в данной дизъюнкции отсутствуют). В результате чего конъюнкция превращается в дизъюнкцию двух конъюнкций (расширение **ДНФ**):



Если же это **КНФ**, то к каждому члену, представляющему собой дизъюнкцию менее **n** членов (n - количество аргументов), добавляется член  тождественно равный 0 (Х- аргумент, отсутствующий в данной дизъюнкции). В результате чего каждый из этих членов превращается в конъюнкцию 2-х дизъюнкций (расширение **КНФ**):

^

**4)**  Приводятся подобные члены.

Далее п.п. 3., 4. повторяются до тех пор, пока функция не будет представлена в **СДНФ** или **СКНФ**, т.е. количество членов в каждой конъюнкции (дизъюнкции) не станет равным **n** и не станет совпадающих дизъюнкций (конъюнкций).

На **втором** этапе происходит преобразование (минимизация) полученной логической функции по известным правилам, приведенным выше.

### 1.7.3. Контрольные вопросы по теме

### «Законы и правила упрощения логических функций»

1. Назовите основные соотношения алгебры логики.
2. Как формулируется закон отрицания конъюнкции?
3. Как формулируется закон отрицания дизъюнкции?
4. Сформулируйте переместительный закон алгебры логики.
5. Сформулируйте сочетательный закон алгебры логики.
6. Какие формы дистрибутивный (распределительный) закон имеет в алгебре логики?
7. Сформулируйте правило склеивания для ДНФ.
8. Сформулируйте правило склеивания для КНФ.
9. Сформулируйте правило поглощения для ДНФ.
10. Сформулируйте правило поглощения для КНФ.
11. Сформулируйте правило свертки для ДНФ.
12. Сформулируйте правило свертки для КНФ.
13. Назовите этапы упрощения логической функции, заданной аналитически.
14. Назовите этапы упрощения логической функции, заданной таблично.
15. Сформулируйте правило расширения для ДНФ.
16. Сформулируйте правило расширения для КНФ.

### 1.7.4. Тестовые задания по теме «Законы и правила упрощения логических функций»

1. **Значение логического выражения  после упрощения будет равно**
2. A
3. 
4. 
5. 1
6. **Значение логического выражения  + после упрощения будет равно**
7. ****
8. **Y**
9. **X**
10. **0**
11. **Значение логического выражения  после упрощения будет равно**
12. **1**
13. **Y**
14. 
15. 
16. **Логическое выражение  равносильно**
17. **0**
18. **1**
19. **A**
20. 
21. **Значение логического выражения  после упрощения будет равно**
22. **A**
23. **B**
24. 
25. 
26. **Логическое выражение  равносильно**
27. **1**
28. **0**
29. A
30. ****
31. **Значение логического выражения  после упрощения будет равно**
32. **B**
33. **A**
34. 
35. 
36. **Логическое выражение A&A равносильно**
37. A
38. **1**
39. 
40. **0**
41. **Значение логического выражения ) после упрощения будет равно**
42. **A**
43. **B**
44. 
45. 
46. **Логическое выражение A+A равносильно**
47. **A**
48. **1**
49. 
50. **0**
51. **Значение логического выражения ) после упрощения будет равно**
52. **B**
53. 
54. 
55. **A**
56. Логическое выражение **A+1** равносильно...
57. 1
58. **A**
59. **0**
60. 
61. **Значение логического выражения A+A&B после упрощения будет равно**
62. **A**
63. **1**
64. **B**
65. 

1. **Для представления логической функции в СКНФ или в СДНФ нужно использовать**
2. правило расширения
3. правило поглощения
4. правило склеивания
5. **Логическая функция  после упрощения примет значение равное**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |
|  |

1. **Логическая функция  является минимальной формой логической функции**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |
|  |

1. **Логическая функция  получилась из логической функции  применением правила**
2. свертки\*
3. склеивания
4. поглощения
5. **Минимальной формой логической функции  является**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |
|  |

1. **Логическая функция  является минимальной формой функции**

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |